

Wyznaczanie wartości przyspieszenia ziemskiego (za pomocą nachylanej linii powietrznej)

Program: **Coach 6**

Projekt: na ZMN060c

**CMA Coach Projects\PTSN Coach 6\Przyspieszenie
ziemskie\Przyspieszenie_ziemskie.cma**

Przykład wyników: Przyspieszenie_ziemskie_wyniki.cmr



Cel ćwiczenia

- Wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego;

Układ pomiarowy

Układ doświadczalny składa się z wózka umieszczonego na linii powietrznej oraz ultradźwiękowego czujnika położenia. Nachylenie linii powietrznej można regulować przez podkładanie odpowiedniej liczby deseczek. Ultradźwiękowy czujnik ruchu (Ultrasonic Motion Detector (0664) (CMA) (0...12m)) podłączony jest wtykiem BT do piątego wejścia cyfrowego konsoli pomiarowej CoachLabII⁺. Przypisanie sterownika następuje automatycznie. Ewentualne zmiany ustawień można wprowadzić we właściwościach sterownika (*Edit properties*). Wysokość pojedynczej deseczki wynosi 1,2 cm, odległość pomiędzy punktami podparcia linii powietrznej to 1,5 m. Kąt nachylenia linii powietrznej wyznacza się ze stosunku wysokości podłożonych deseczek do odległości pomiędzy

punktami podparcia. Wykorzystując zależności trygonometryczne, zachodzące w trójkącie prostokątnym, można wyznaczyć wartość kąta nachylenia. Jest to np. \arctg stosunku wysokości deseczek do odległości między punktami podparcia.



Schemat układu pomiarowego



Ustawienia parametrów pomiaru:


Method:

Type: *Time based*

Measuring time: *5 seconds*

Frequency: *8 per second*

Pomiar

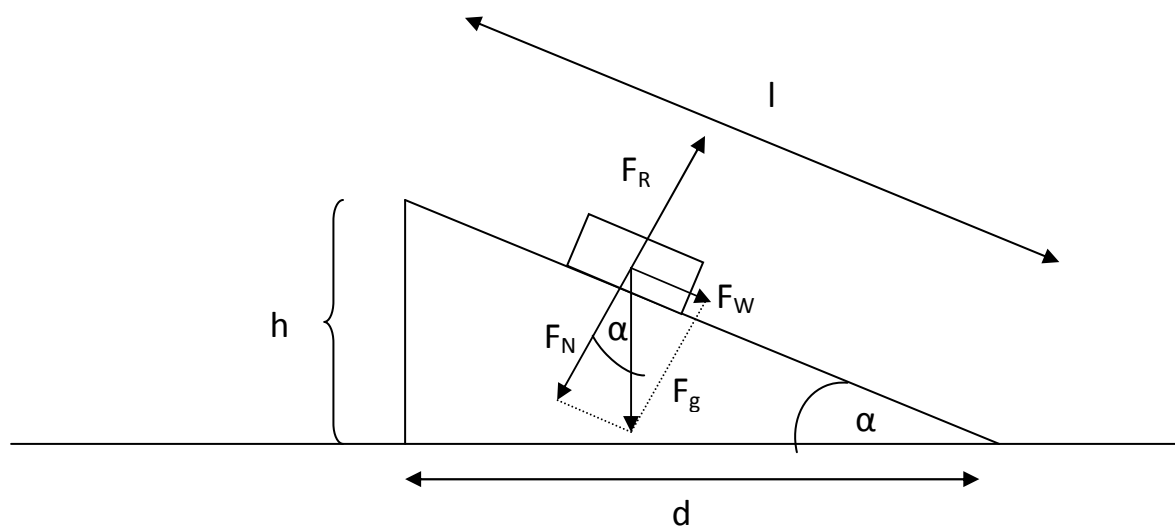
- Podłożyć deseczki pod punkt podparcia linii powietrznej znajdujący się z lewej strony;
- Ustawić czujnik odległości w pionie tak, by „widział” wózek na całej długości linii (przesuwając wózek po linii sprawdzić wskazania czujnika odległości);
- Przesunąć wózek do początku linii powietrznej i przytrzymać, by się nie poruszał;
- Zwolnić wózek i rozpocząć pomiar – przycisk start (F9) ;
- Wyznaczyć przyspieszenie wózka „a”;
- Zmierzyć wysokość uniesienia linii powietrznej (h) oraz odległość między punktami podparcia (d)

Obserwacje

W doświadczeniu, wózek umieszczony jest na nachylonej linii powietrznej, tak więc niezrównoważona stała siła (składowa siły ciężkości równoległa do linii powietrznej) nadaje mu stałe przyspieszenie. Wykres zależności położenia wózka od czasu ma postać paraboli. Na podstawie tej zależności można wyznaczyć wartość przyspieszenia wózka.

Analiza wyników

Na ciało umieszczone na równi pochyłej działają następujące siły:



Schemat rozkładu sił w układzie

F_g – siła ciężkości

F_N – siła nacisku (składowa siły ciężkości)

F_W – siła wypadkowa działająca na ciało (składowa siły ciężkości)

F_R – siła reakcji podłoża

h – wysokość uniesienia linii powietrznej

d – długość linii przy podłożu

l – długość toru ruchu.

Uwaga:

- zastosowanie linii powietrznej pozwala na eliminację tarcia;
- W doświadczeniu zaniebduje się wpływ sił oporu powietrza

W wyniku działania na ciało stałej niezrównoważonej siły wypadkowej F_W , porusza się ono ruchem jednostajnie przyspieszonym. Wartość siły F_W zależy od kąta nachylenia α i może być wyznaczona z zależności trygonometrycznych: $F_W = F_g \cdot \sin \alpha$

Pod wpływem działania siły F_w ciało porusza się z przyspieszeniem:

$$a = \frac{F_w}{m}$$

gdzie m – masa wózka, a – przyspieszenie wózka. Wartość przyspieszenia może być wyznaczona w trakcie doświadczenia. Siła F_w , której działanie powoduje ruch wózka, jest składową siły ciężkości. Jej wartość można wyrazić wykorzystując zależności trygonometryczne:

$$F_w = F_g \cdot \sin \alpha = mg \cdot \sin \alpha$$

F_g jest siłą ciężkości, g – wartość przyspieszenia ziemskiego.

Przekształcając powyższe równania można obliczyć wartość przyspieszenia ziemskiego g :

$$a = \frac{mg \cdot \sin \alpha}{m} = g \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{l} \approx \frac{h}{d}$$

$$a = g \cdot \frac{h}{l} \approx g \cdot \frac{h}{d}$$

$$g = a \cdot \frac{l}{h} \approx a \cdot \frac{d}{h}$$

Przybliżenie dla małych kątów,

Program Coach został tak przygotowany (**Przyspieszenie_ziemskie.cma**) do tego ćwiczenia, że automatycznie rysuje wykres zależności położenia wózka od czasu, wygładza go, a następnie różniczkuje tworząc wykres prędkości wózka od czasu. W celu wyznaczenia przyspieszenia wózka należy zbadać nachylenie krzywej na wykresie prędkości od czasu (otworzyć menu kontekstowe prawym przyciskiem myszy na wykresie prędkości, wybrać *Process/Analyze*, a następnie *Slope*; jako *Column* wskazać *Prędkosc*). Szukaną wartością przyspieszenia jest współczynnik nachylenia krzywej ($v = a \cdot t$).

Do tabeli obliczenia należy wprowadzić wysokość, na jaką została uniesiona linia powietrzna, odległość pomiędzy jej punktami podparcia oraz wyznaczoną wartość przyspieszenia. Wartość kąta nachylenia (w radianach) oraz szukana wartość przyspieszenia ziemskiego obliczane są automatycznie.

Uwaga: Można wykonać kilka pomiarów w celu wyznaczenia niepewności pomiarowej.

Wykres położenia od czasu (dane z czujnika)

Wykres położenia od czasu (wygładzone dane) oraz wykres prędkości od czasu

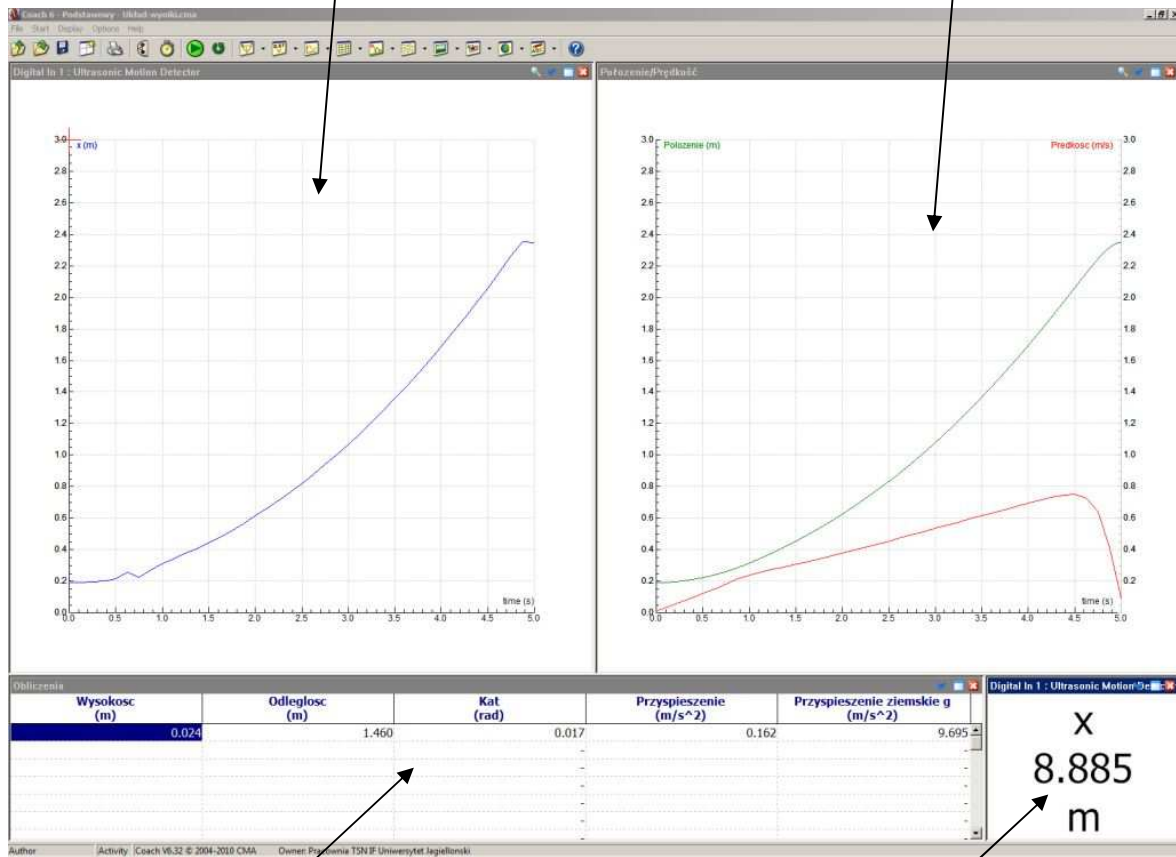
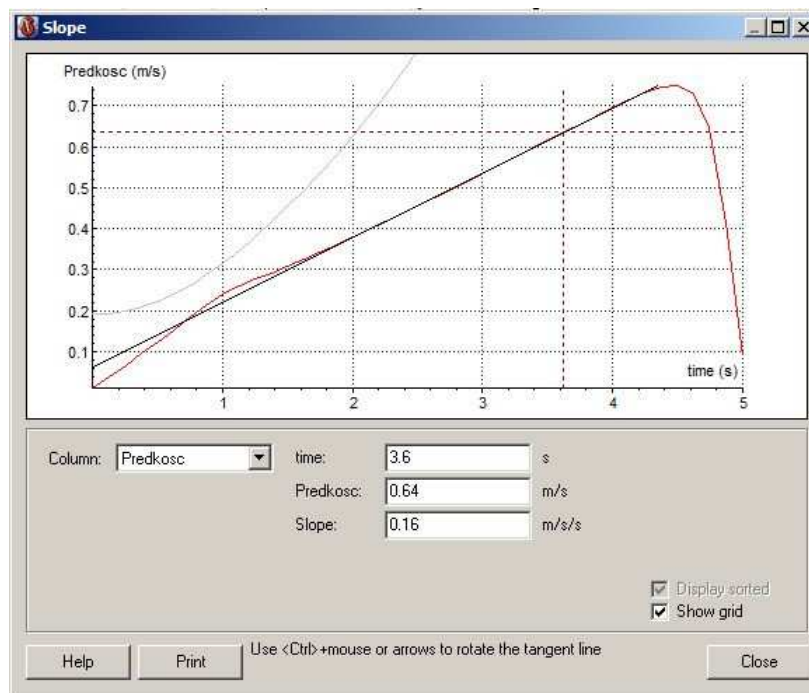


Tabela „Obliczenia”

Widok wskazań czujnika odległości

Przykładowy widok okna programu.



Okienko „Slope” dopasowania

Przykładowe wyniki

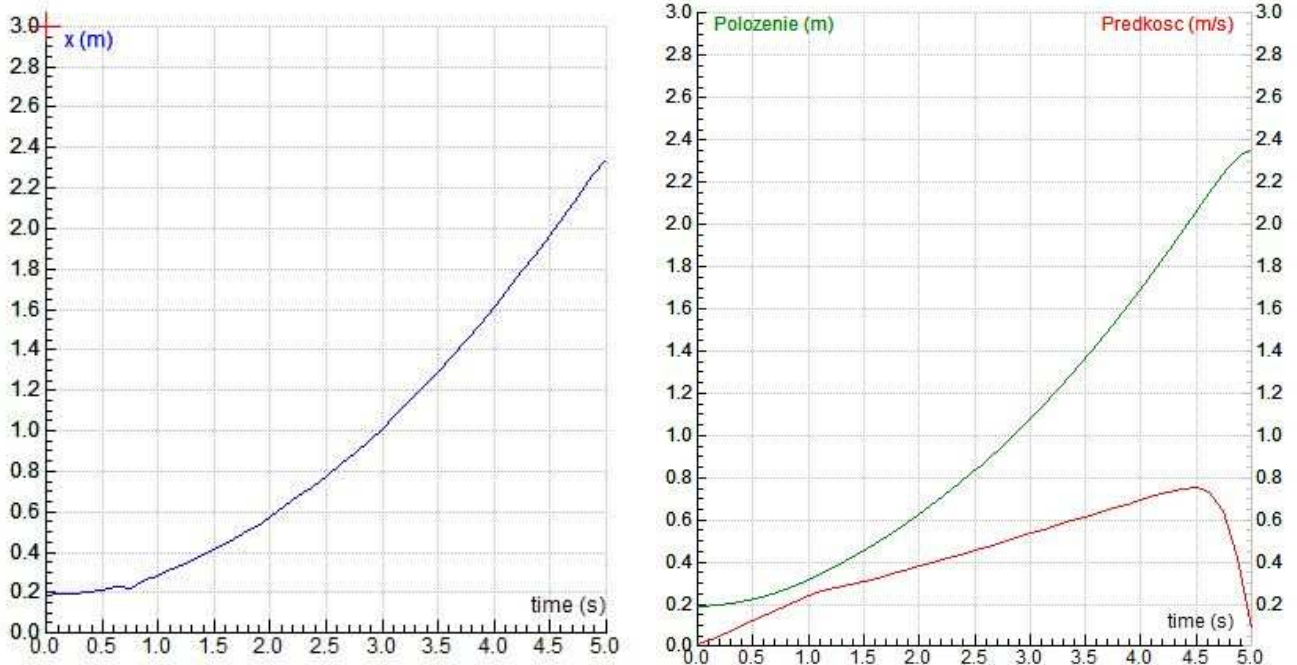


Diagram po lewej: wykres zależności położenia wózka od czasu sporządzony bezpośrednio na podstawie danych z detektora. Diagram po prawej: wygładzony wykres zależności położenia wózka od czasu (zielony) oraz wykres prędkości wózka od czasu (czerwony).

Obliczenia					
Wysokosc (m)	Odleglosc (m)	Kat (rad)	Przyspieszenie (m/s ²)	Przyspieszenie ziemskie g (m/s ²)	
0.024	1.460	0.017	0.162	9.695	
0.024	1.460	0.016	0.156	9.491	
0.024	1.460	0.016	0.158	9.613	

Przykładowe wyniki dla trzech serii pomiarów.

W przedstawionym przykładzie udało się uzyskać wartość przyspieszenia ziemskiego wynoszącą 9,599(84) m/s²

**Wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego
(za pomocą nachylanej linii powietrznej)**

*Wariant z ekstrapolacją wyników do nachylenia linii powietrznej pod kątem 90°
(uproszczony)*

Program: **Coach 6**

Projekt: na ZMN060c

**CMA Coach Projects\PTSN Coach 6\Przyspieszenie
ziemskie\Przyspieszenie_ziemskie(wariant_I).cma**

Przykład wyników: Przyspieszenie_ziemskie_wyniki_wariant_I.cmr




Cel ćwiczenia

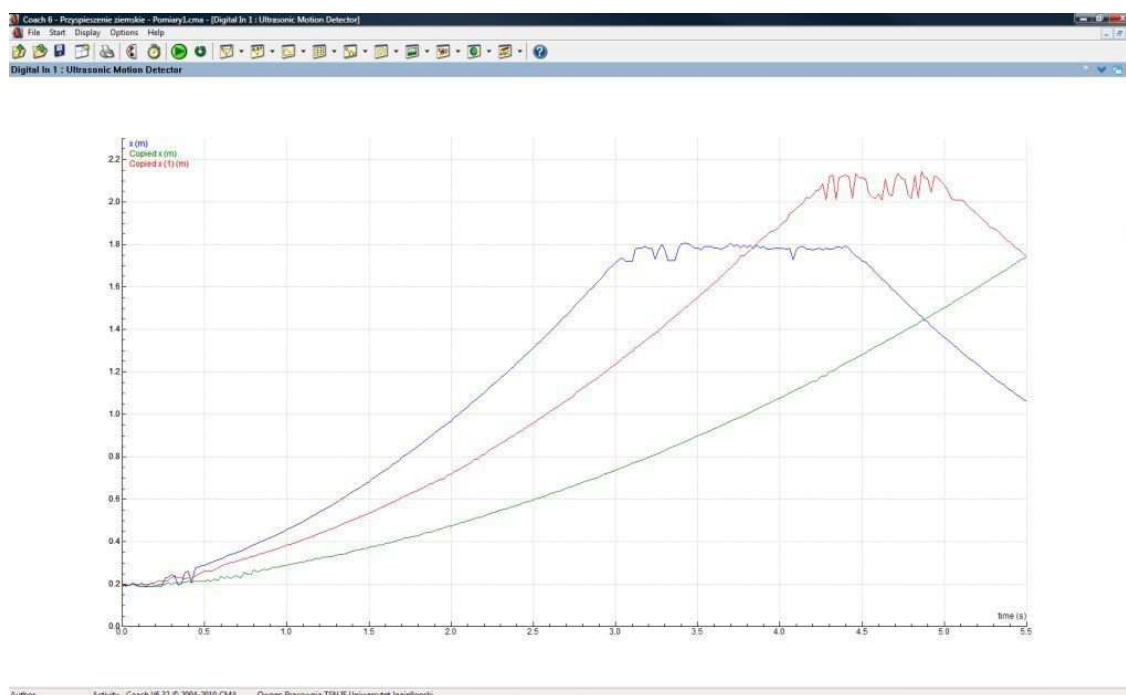
- Wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego;
- Porównanie wartości otrzymanych przy zastosowaniu różnych metod analizy danych.

Układ pomiarowy

Układ jest analogiczny do stosowanego w wersji podstawowej ćwiczenia.

Pomiar

- Podłożyć jedną deseczkę pod punkt podparcia linii powietrznej znajdujący się z lewej strony;
- Ustawić czujnik odległości w pionie tak, by „widział” wózek na całej długości linii (przesuwając wózek po linii sprawdzić wskazania czujnika odległości);
- Przesunąć wózek do początku linii powietrznej i przytrzymać, by się nie poruszał;
- Zwolnić wózek i rozpocząć pomiar – przycisk start (F9)  ;
- Skopiować kolumnę „x (m)” (copy column) i powtórzyć pomiar dla innych kątów nachylenia linii powietrznej (różnej liczby podłożonych deseczek).



Pełnoekranowy widok przykładowych pomiarów dla trzech kątów nachylenia linii powietrznej.

Obserwacje

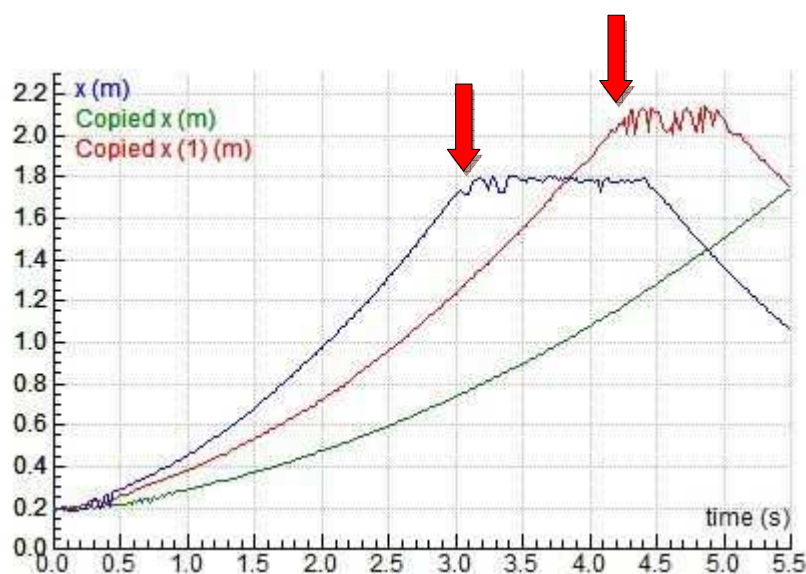
Wraz ze wzrostem nachylenia linii powietrznej skraca się czas, w którym wózek pokonuje zadaną odległość; osiągane są coraz większe prędkości, wózek porusza się z coraz większym przyspieszeniem. Ruch wózka spowodowany jest działaniem siły grawitacji (powszechnego ciężenia). Jeżeli ruch odbywałby się pod kątem 90° do powierzchni ziemi,

przyspieszenie ciała było by równe przyspieszeniu ziemskiemu, a zjawisko takie nazywane jest spadkiem swobodnym.

Analiza wyników

W celu wyznaczenia wartości przyspieszenia ziemskiego, należy wykonać pomiary przyspieszenia wózka na nachylonej linii powietrznej, a następnie ekstrapolować wyniki do kąta nachylenia 90° (spadek swobodny).

Dla każdego pomiaru położenia od czasu wyznaczana jest automatycznie prędkość wózka oraz przyspieszenie. Prędkość przedstawiona jest na wykresie natomiast przyspieszenie można odczytać z tabeli (kolumna „a (m/s²)”). (Jeżeli otrzymane krzywe zawierają obszary, w których wózek odbijał się już od końca linii powietrznej, należy zwrócić uwagę, by odczytywać wartości przyspieszenia z obszaru przed odbiciem wózka.)



Przykładowe pomiary z zaznaczonymi miejscami, w których wózek zaczął się odbijać od brzegu linii powietrznej.

Dla każdego pomiaru należy uzupełnić jeden wiersz w tabeli „Obliczenia”.

- Konieczne jest wyznaczenie kąta nachylenia linii powietrznej. Dokonuje się tego mierząc wysokość podkładanych klocków oraz odległość pomiędzy jej punktami podparcia. Kąt nachylenia można obliczyć, jako arcustangens stosunku tych wielkości. Odpowiednie obliczenia dokonywane są w programie COACH automatycznie.

- Należy podać odczytaną dla danego pomiaru wartość przyspieszenia.

Odleglosc (m)	Wysokosc (m)	Kat (deg)	Sin(Kat)	Przyspieszenie (m/s ²)
1.50	0.012	0.458	0.008	0.079
1.50	0.024	0.917	0.016	0.157
1.50	0.036	1.375	0.024	0.229

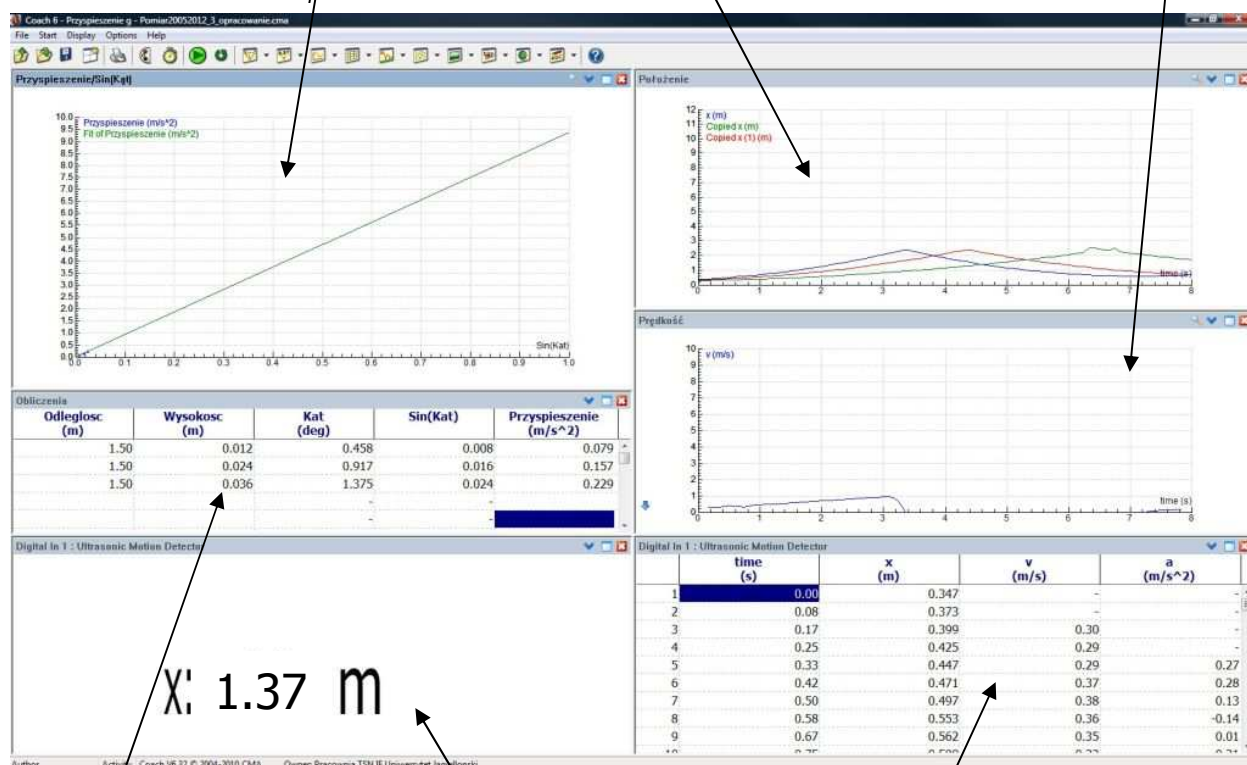
Widok tabeli Obliczenia.

Na podstawie danych z tabeli „Obliczenia” sporządzany jest wykres przyspieszenia wózka w zależności od kąta nachylenia linii powietrznej.

Wykres zależności przyspieszenia od sinusa kąta nachylenia linii powietrznej

Wykres położenia wózka w funkcji

Wykres przyspieszenia wózka w funkcji



X: 1.37 m

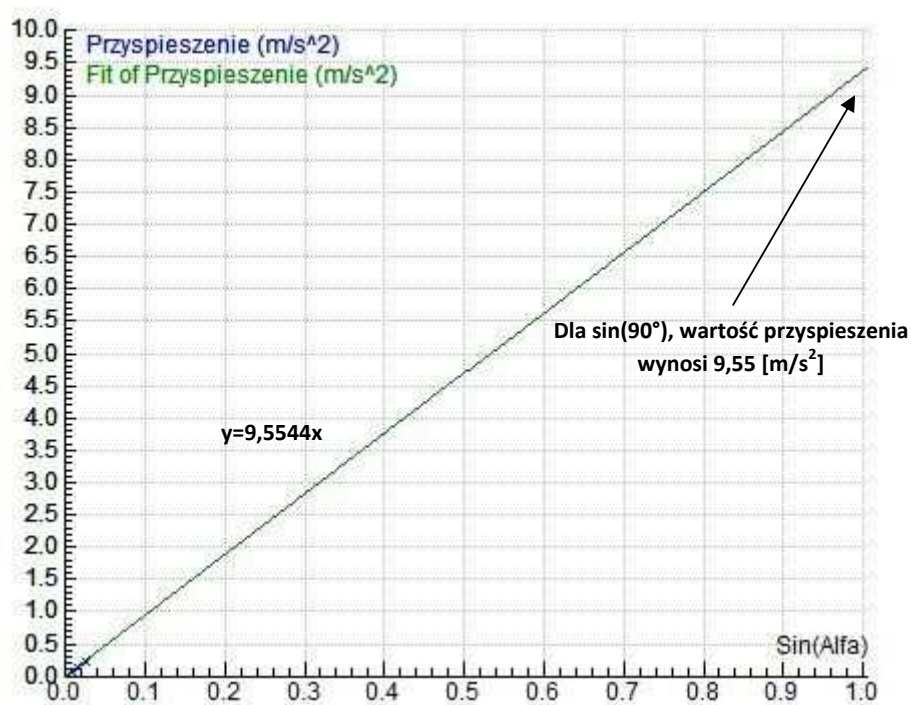
Tabela „Obliczenia”

Tabela z danymi pomiarowymi

Podgląd wskazania czujnika odległości

Przykładowy widok okna programu.

Na podstawie danych wprowadzonych do tabeli konstruowany jest wykres zależności przyspieszenia wózka od sinusa kąta nachylenia linii powietrznej. Wartość przyspieszenia odpowiadająca wartości $\sin(\text{Alfa})=1$ (odpowiada przypadkowi spadku swobodnego) jest wyznaczoną wartością przyspieszenia ziemskiego.



Wykres zależności przyspieszenia wózka w zależności od kąta nachylenia linii powietrznej.

Propozycje analizy pomiarów:

1. Sprawdzić, jak dokładnie można wyznaczyć wartość przyspieszenia ziemskiego dokonując pojedynczego pomiaru. Do otrzymanego wyniku dopasować prostą wg wzoru $y=ax$ (przechodzącą przez punkt zero – przy braku nachylenia linii powietrznej, wózek nie ma przyspieszenia);
2. Do wyników kilku pomiarów dopasować proste wg wzorów: $y=ax$ i $y=ax+b$. Porównać wyniki. Zastanowić się nad możliwą przyczyną różnic.
3. Porównać wyniki pomiarów z punktów 1 i 2.

**Wyznaczanie wartości przyspieszenia ziemskiego
(za pomocą nachylanej linii powietrznej)**

*Wariant z ekstrapolacją wyników do nachylenia linii powietrznej pod kątem 90°
(pełny)*

Program: **Coach 6**

Projekt: na ZMN060c

**CMA Coach Projects\PTSN Coach 6\Przyspieszenie
ziemskie\Przyspieszenie_ziemske(wariant_I).cma**

Przykład wyników: Przyspieszenie_ziemske_wyniki_wariant_I.cmr




Cel ćwiczenia

- Wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego;
- Porównanie wartości otrzymanych przy zastosowaniu różnych metod analizy danych.

Układ pomiarowy

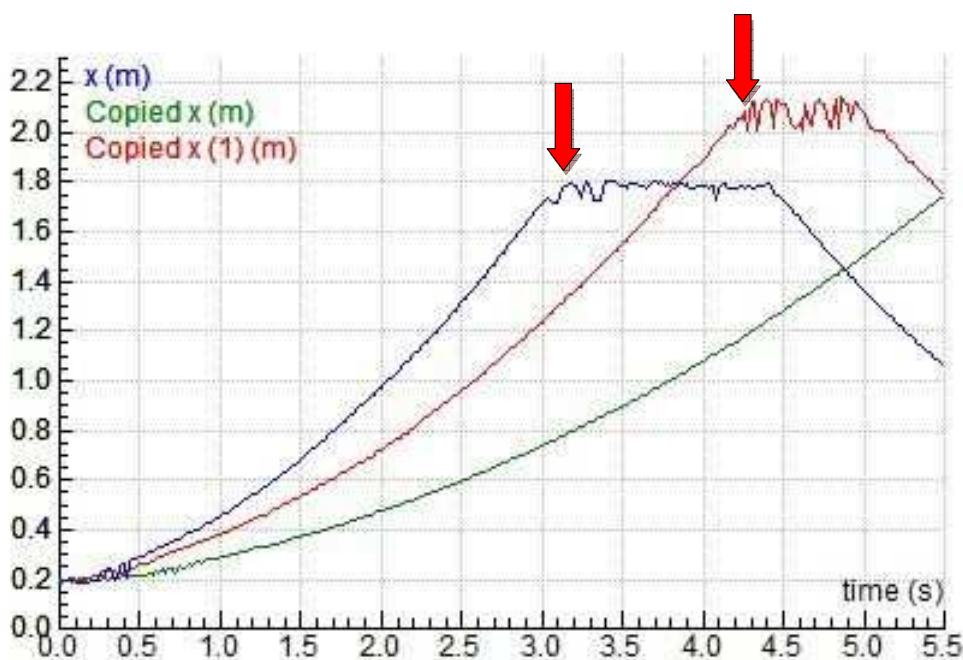
Układ jest analogiczny do stosowanego w wersji podstawowej ćwiczenia.

Pomiar

- Podłożyć jedną deseczkę pod punkt podparcia linii powietrznej znajdujący się z lewej strony;
- Ustawić czujnik odległości w pionie tak, by „widział” wózek na całej długości linii (przesuwając wózek po linii sprawdzić wskazania czujnika odległości);
- Przesunąć wózek do początku linii powietrznej i przytrzymać, by się nie poruszał;
- Zwolnić wózek i rozpocząć pomiar – przycisk start (F9)  ;
- Skopiować kolumnę „x (m)” (copy column) i powtórzyć pomiar dla innych kątów nachylenia linii powietrznej (różnej liczby podłożonych deseczek).

Analiza wyników

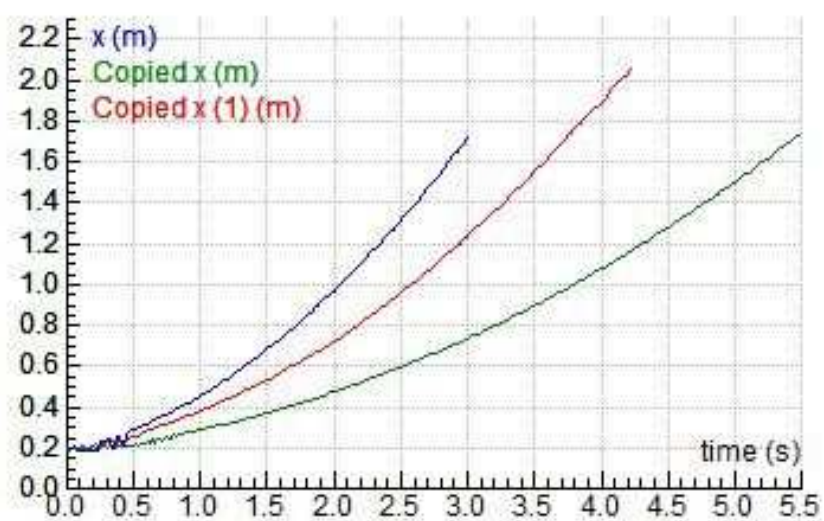
Z otrzymanych wykresów zależności położenia wózka na linii powietrznej od czasu należy wyznaczyć wartości przyspieszenia dla każdego z pomiarów, poprzez obliczenie drugiej pochodnej po czasie ($a = \frac{d^2x}{dt^2}$). Jeżeli otrzymane krzywe zawierają obszary, w których wózek odbijał się już od końca linii powietrznej, należy usunąć te fragmenty i pozostawić tylko obszary odpowiadające fazie ruchu, gdy wózek przyspieszał pod wpływem siły grawitacji. W tabeli zawierającej doświadczalne punkty pomiarowe należy odszukać punkty, które odpowiadają sytuacji, gdy wózek zaczął się odbijać i usunąć je.



Przykładowe pomiary z zaznaczonymi miejscami, w których wózek zaczął się odbijać od brzegu linii powietrznej.

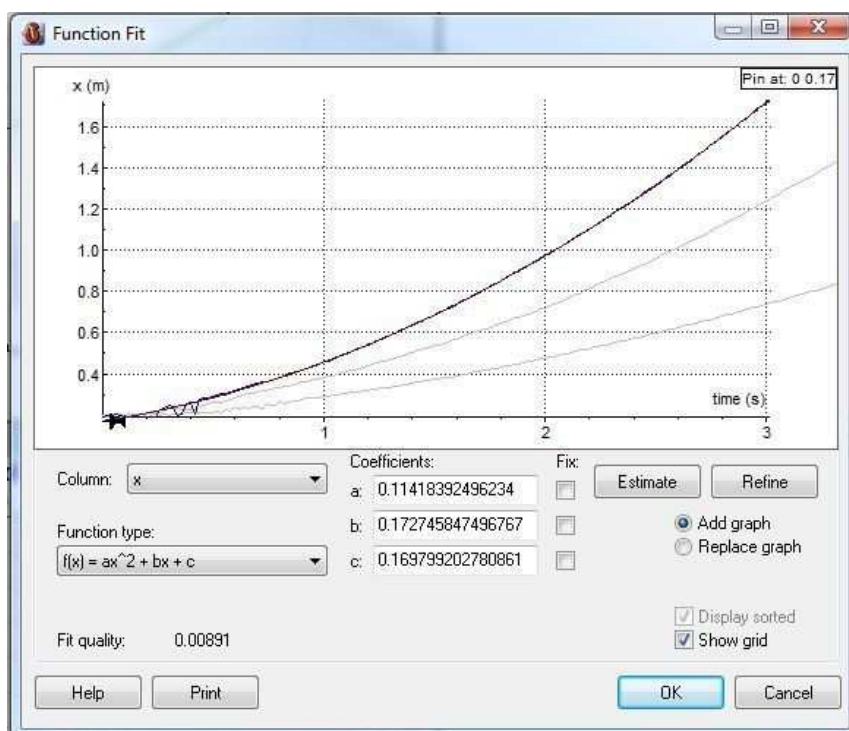
time (s)	x (m)
2.86	1.599
2.88	1.616
2.90	1.632
2.92	1.649
2.94	1.666
2.96	1.686
2.98	1.699
3.00	1.714
3.02	1.727
3.04	
3.06	
3.08	
3.10	
3.12	
3.14	
3.16	

Widok tabeli z częściowo wykasowanymi punktami



Przykładowe pomiary z widocznymi obszarami odpowiadającymi sytuacji, w której wózek przyspieszał pod wpływem działania siły grawitacji.

Do otrzymanych wykresów należy dopasować krzywe teoretyczne według wzoru: $f(x)=ax^2+bx+c$. Służy do tego polecenie *Function Fit* (Prawy przycisk myszy → *Process/Analyze* → *Function Fit*). W okienku dopasowania funkcji, jako *Column* wybrać odpowiednio wartości dla kolejnych pomiarów, natomiast jako *Function type* „ $f(x)=ax^2+bx+c$ ”. Przyciskami *Estimate* (oszacowanie przebiegu krzywej), *Refine* (dopasowanie krzywej) przeprowadzić dopasowanie, a następnie zatwierdzić wyniki przyciskiem *OK*. Wybierając opcję *Replace graph* można zastąpić krzywą doświadczalną krzywą z dopasowania.

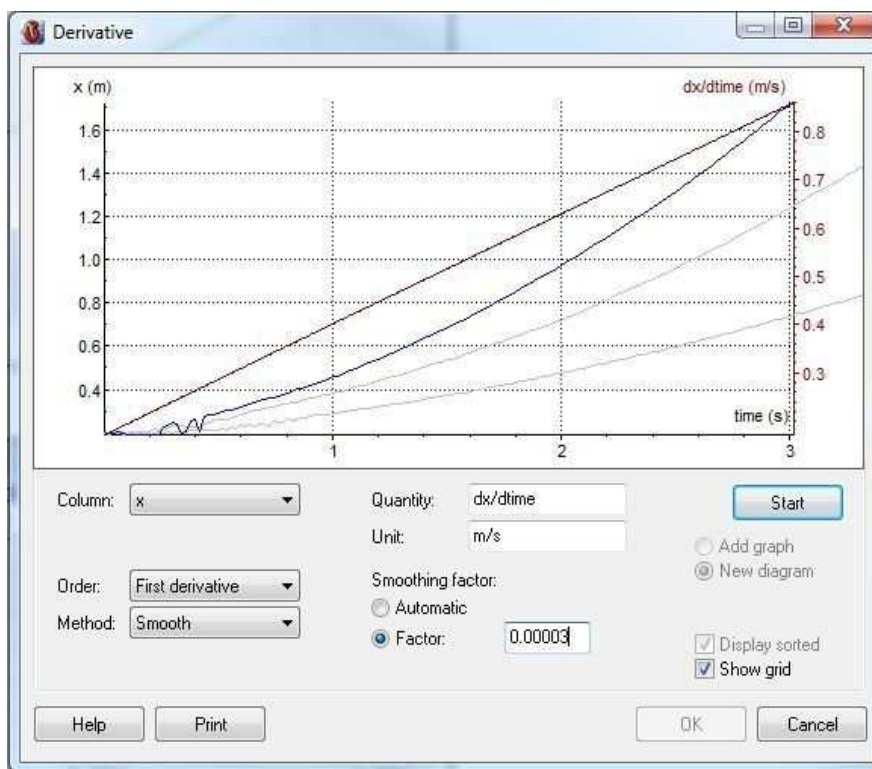


Widok okienka dopasowania funkcji.

Przyspieszenie jest drugą pochodną położenia po czasie. Można wyznaczyć na wykresie wartość przyspieszenia przez obliczenie odpowiednich pochodnych po czasie dopasowanych krzywych (procedura opisana poniżej) lub tylko odczytać wartość parametru dopasowania a (jest to wartość przyspieszenia).

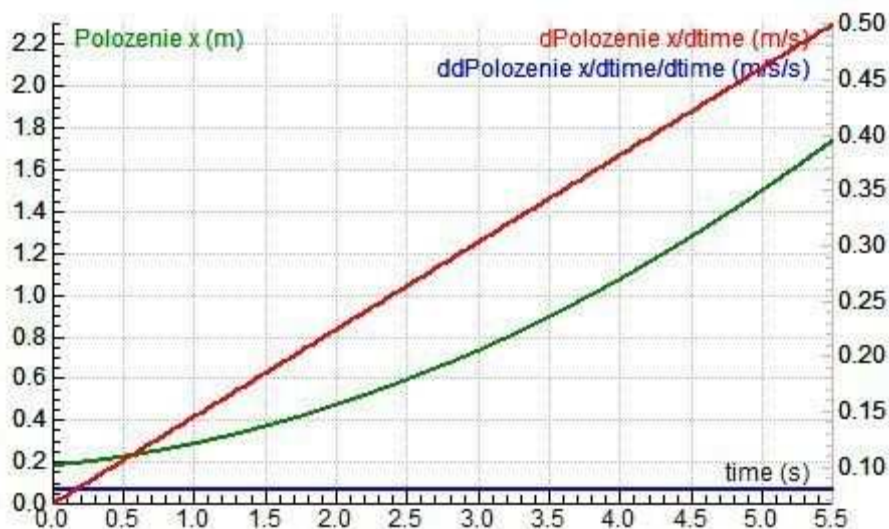
Procedura wyznaczenia wartości przyspieszenia na wykresie:

Do tego celu służy polecenie *Derivative* (Prawy przycisk myszy → *Process/Analyze* → *Derivative*). W okienku pochodnej, jako *Column* wybrać odpowiednio wartości dla kolejnych pomiarów, natomiast, jako *Order* ustawić pierwszą lub drugą pochodną. Wybierając, jako *Method* opcję *Smooth*, otrzymuje się wygładzoną pochodną. Przycisk *Start* służy do rozpoczęcia obliczeń. Przyciskiem *OK* zatwierdza się wyniki. Zaznaczając opcję *New diagram* można umieścić wyznaczoną pochodną w nowym oknie, co przyczynia się do przejrzystości prezentowanych wykresów.



Okienko pochodnej.

Dla każdego z pomiarów można w ten sposób wyznaczyć prędkość oraz przyspieszenie, jako funkcje czasu.



Wykres położenia wózka w funkcji czasu – krzywa zielona,
 prędkości wózka – krzywa czerwona oraz położenia – krzywa

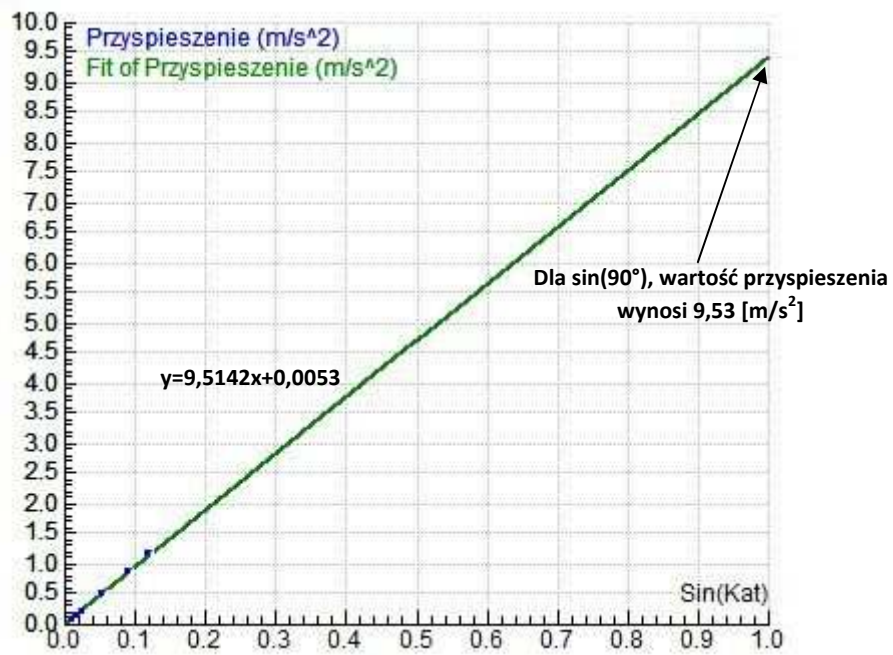
Dane potrzebne do sporządzenia wykresu zależności przyspieszenia, z jakim poruszał się wózek od kąta nachylenia linii powietrznej należy wprowadzić do tabeli *Obliczenia*. Kąt nachylenia można obliczyć, jako arcustangens stosunku wysokości podłożonych deseczek od odległości pomiędzy punktami podparcia linii powietrznej. Wielkości te powinny być zmierzone przed każdym pomiarem

Kolumny *Alfa (deg)* oraz *Sin(Alfa)* obliczane są automatycznie.

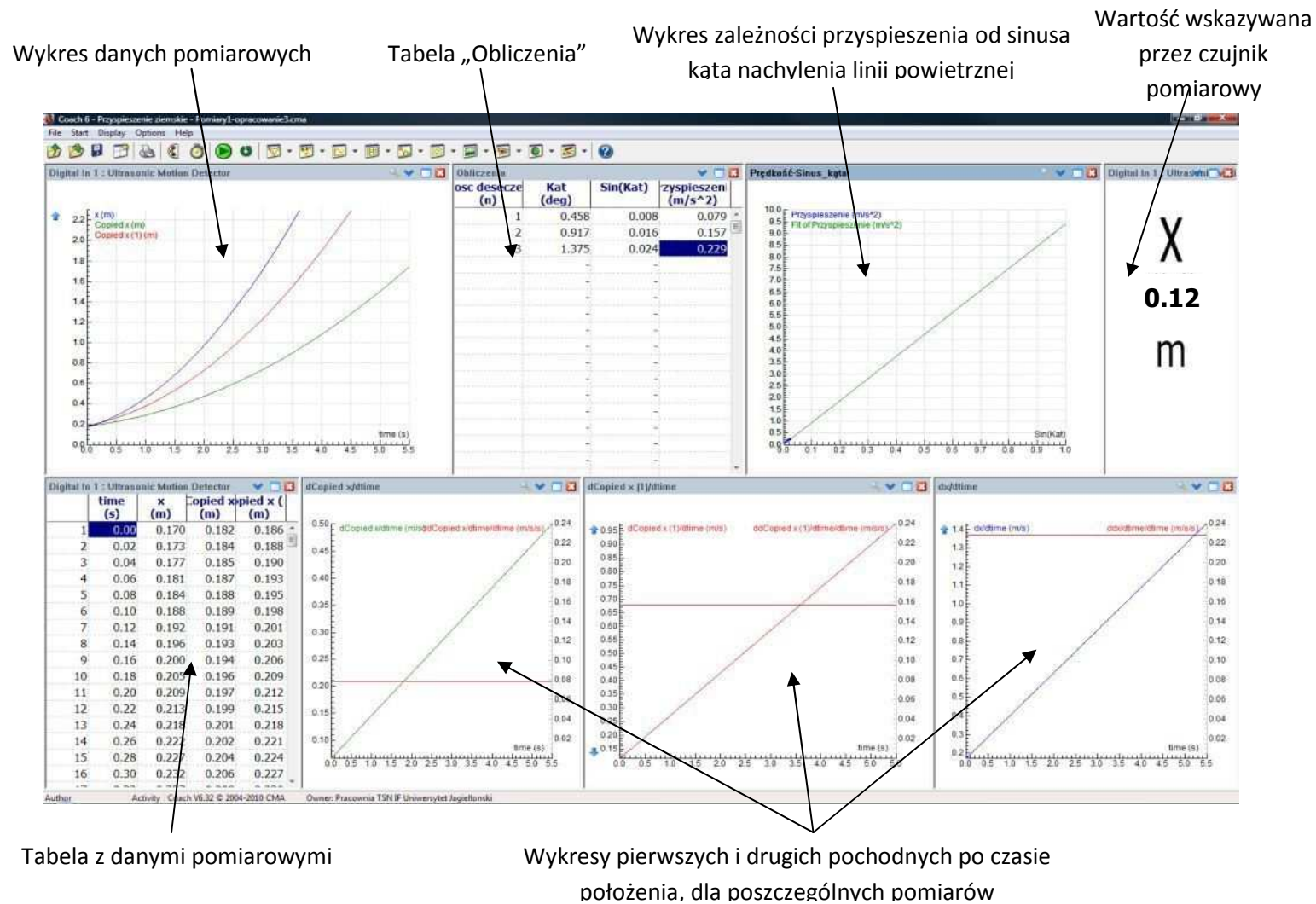
Obliczenia	Odleglosc (m)	Wysokosc (m)	Alfa (deg)	Sin(Alfa)	Przyspieszenie (m/s ²)
	1.50	0.012	0.458	0.008	0.079
	1.50	0.024	0.917	0.016	0.157
	1.50	0.036	1.375	0.024	0.229

Tabela „Obliczenia” zawierająca dane potrzebne do sporządzenia wykresu zależności prędkości od kąta nachylenia linii powietrznej.

Na podstawie danych wprowadzonych do tabeli konstruowany jest wykres zależności przyspieszenia wózka od sinusa kąta nachylenia linii powietrznej. Wartość przyspieszenia odpowiadająca wartości $\sin(\text{Alfa})=1$ (odpowiada przypadkowi spadku swobodnego) jest wyznaczoną wartością przyspieszenia ziemskiego.



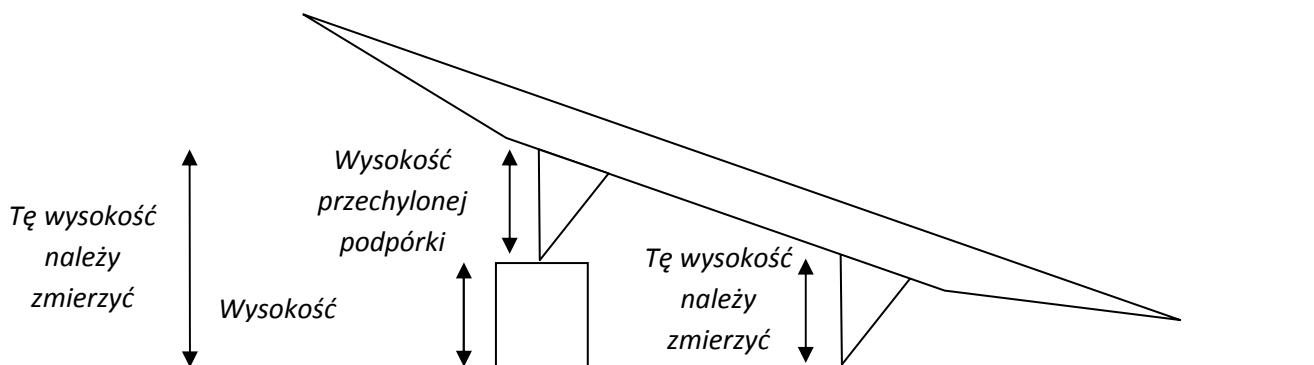
Wykres zależności przyspieszenia wózka w zależności od kąta nachylenia linii powietrznej.



Widok przykładowego ułożenia okienek z danymi pomiarowymi w systemie Coach 6.

Uwagi odnośnie doświadczenia:

- Zaproponowano dwa sposoby rozszerzenia doświadczenia.
- W instrukcji do wariantów rozszerzonych zaproponowany został złożony sposób wyznaczania prędkości i przyspieszenia przez dopasowanie do danych doświadczalnych krzywych teoretycznych, a następnie kolejne obliczanie pochodnych. Jest to dokładny sposób, lecz można również w opcjach tabeli (prawy przycisk myszy → *Edit diagram/table*) wybrać automatyczne obliczanie pochodnej w nowej kolumnie.
- Należy zwrócić uwagę, iż przy większych kątach nachylenia, zmianie może ulec geometria układu. Wysokość pochylonej podpórki nie jest równa wysokości podpórki pionowej. Obliczając wysokość uniesienia linii powietrznej, należy sprawdzić faktyczną wysokość uniesienia. Opisaną sytuację ilustruje poniższy rysunek:



Schemat układu doświadczalnego.

Sposób uniesienia linii powietrznej za pomocą deseczek

