



Pływanie ciał w wirującej cieczy – akcelerometr

Bogdan Bogacz, Renata Gargula, Andrzej Fudyma
Pracownia Technicznych Środków Nauczania
Zakład Metodyki Nauczania i Metodologii Fizyki, Instytut Fizyki UJ

I. Uogólnione prawo Archimedesesa

Zachowanie ciał zanurzonych w wirującym płynie może być zaskakujące. Aby przygotować się do zrozumienia takich zachowań uogólnimy prawo Archimedesesa [1]. Rozpatrzmy siły działające na ciało o objętości V i gęstości ρ zanurzone w płynie o gęstości ρ_0 , poruszającym się wraz z tym ciałem z przyspieszeniem \vec{a} . Rozważania będziemy prowadzić z punktu widzenia nieinercyjnego układu odniesienia poruszającego się wraz z płynem. W takim układzie odniesienia na ciało, oprócz siły ciężkości

$$\vec{F}_g = \rho V \vec{g} \quad (1)$$

(\vec{g} jest przyspieszeniem ziemskim), działa siła bezwładności

$$\vec{F}_b = -\rho V \vec{a} \quad (2)$$

i siła \vec{F}_w będąca konsekwencją działania płynu, w którym ciało jest zanurzone, na powierzchnię ciała, nazywana siłą wyporu. Siła ta nie zmieni się, jeżeli zanurzone ciało zamienimy na inne o tym samym kształcie i objętości, umieszczone w tym samym miejscu. Korzystając z tego, że dla całkowicie zanurzonego ciała, zbudowanego z materiału takiego samego jak otaczający ośrodek, czyli płynu o gęstości ρ_0 , układ pozostaje w równowadze

$$\vec{F}'_g + \vec{F}'_b + \vec{F}_w = \rho_0 V \vec{g} - \rho_0 V \vec{a} + \vec{F}_w = 0 \quad (3)$$

możemy obliczyć siłę wyporu \vec{F}_w [1]. Siła ta ma wartość i kierunek sumy siły ciężkości i siły bezwładności, działających na płyn o objętości zanurzonego w nim ciała, ale ma przeciwny zwrot.

$$\vec{F}_w = \rho_0 V (-\vec{g} + \vec{a}) \quad (4)$$

Siła wypadkowa działająca na ciało o gęstości ρ , całkowicie zanurzone w płynie o gęstości ρ_0 , opisana jest wzorem

$$\vec{F} = (\rho_0 - \rho) V (-\vec{g} + \vec{a}) \quad (5)$$

II. Zachowanie ciał zanurzonych w wirującym płynie

Aby sprawdzić eksperymentalnie, jak zachowują się ciała zanurzone w płynie podczas wirowania [1, 2], wykorzystana została V-rurka zamontowana na wirownicy (rys. 1). W jednym z jej wypełnionych wodą i szczelnie zamkniętych ramion umieszczono kulkę ze styropianu (o gęstości mniejszej niż gęstość wody), a w drugim kulkę ze sztucznego tworzywa (o gęstości większej niż gęstość wody). Rurkę wprowadzono w ruch obrotowy stopniowo zwiększając prędkość wirowania i obserwując zachowanie kulek.



Rys. 1. V-rurka zamontowana na wirownicy

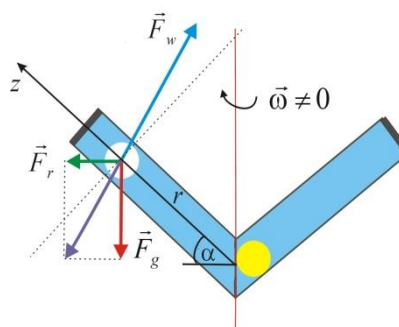
Zaobserwowano, że:

- gdy prędkość wirowania osiąga pewną wartość, styropianowa kulka (biała) zaczyna przesuwać się w kierunku osi obrotu,
- przesunięcie tej kulki, a więc również jej głębokość zanurzenia, rośnie, gdy rośnie prędkość kątowa wirowania,
- gdy biała, lekka kulka dotrze do samego dna, wtedy zaczyna wypływać ciężka kulka (ze sztucznego tworzywa) i szybko przesuwa się do góry, aż do korka, bez konieczności dalszego zwiększania prędkości wirowania.

W celu opisanego i zrozumienia zachowania kulki rozpatrzmy siły działające na nią w nieinercyjnym układzie odniesienia związanym z tą kulką. Kulka o objętości V i gęstości ρ umieszczona jest w rurce z wodą (o gęstości ρ_0) obracającą się z częstością $\vec{\omega}$, w odległości r od środka układu (rys. 2). Rurka jest nachylona pod kątem α względem poziomu.

Na kulkę działają:

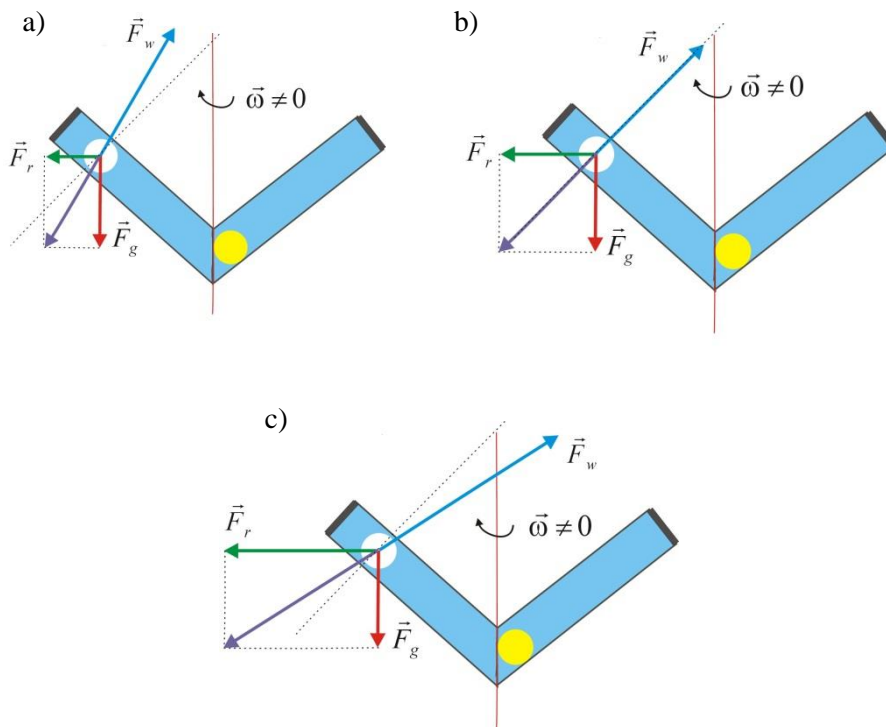
- siła grawitacji $\vec{F}_g = \rho V \vec{g}$,
- siła bezwładności (tutaj jest nią siła odśrodkowa) $\vec{F}_r = -\rho V \vec{a}_r$ (\vec{a}_r przyspieszenie dośrodkowe), pozioma, o zwrocie skierowanym „na zewnątrz” od osi obrotu i o wartości $F_r = m \omega^2 r \cos \alpha$, gdzie $r \cos \alpha$ jest odległością kulki od osi obrotu,
- siła wyporu $\vec{F}_w = -\rho_0 V (\vec{g} - \vec{a}_r)$



Rys. 2. Siły działające na kulkę zanurzoną w cieczy w wirującej rurce

Zgodnie z uogólnionym prawem Archimidesa [1] kierunek siły wyporu jest określony przez wypadkowe przyspieszenie $(\vec{g} - \vec{a}_r)$, a więc również przez

wypadkową siły ciężkości \vec{F}_g i siły odśrodkowej \vec{F}_r (rys. 2). W konsekwencji jest to również kierunek siły wypadkowej $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_r + \vec{F}_w$ wszystkich trzech rozważanych sił.



Rys. 3. Biała kulka a) wypływa, b) jest w pozycji równowagi, c) tonie

Ustawienie rurki pod pewnym kątem względem poziomu umożliwia obserwację konkurencji między siłą ciężkości i siłą odśrodkową działającą na kulkę. Wraz ze wzrostem prędkości kątowej (częstości) wirowania rośnie siła odśrodkowa \vec{F}_r . W konsekwencji kierunek siły wyporu \vec{F}_w (i siły wypadkowej \vec{F}) odchyła się od kierunku pionowego (dla $\omega = 0$) i dąży do kierunku poziomego dla bardzo dużych częstości (rys. 3). Ustawienie tego kierunku względem normalnej do rurki decyduje o zachowaniu się kulki. Od tego ustawienia zależy zwrot składowej siły wypadkowej działającej wzdłuż rurki. Dla kulki lekkiej $|\vec{F}_w| > |\vec{F}_g + \vec{F}_r|$ siła wypadkowa \vec{F} ma zwrot siły wyporu \vec{F}_w . Wtedy przy ma-

łych prędkościach obrotu składowa siły wypadkowej działającej wzdłuż rurki ma zwrot na zewnątrz (kulka wypływa, r rośnie), przy pewnej częstotliwości obrotów siła wyporu jest prostopadła do rurki – kulka znajduje się w położeniu równowagi, a przy dużych częstotliwościach ma zwrot do wewnątrz (kulka tonie, r maleje).

III. Matematyczny opis zjawiska

Matematycznego opisu zjawiska dokonamy wyznaczając siłę wypadkową działającą na kulkę wzdłuż osi rurki (rys. 4, oś z). Składowe siły prostopadłe do osi rurki są równoważone poprzez oddziaływanie ze ściankami. Będziemy sumowali składowe równoległe do osi z dla trzech sił działających na kulkę:

- siły grawitacji

$$F_{gz} = \rho V g_z = -\rho V g \sin \alpha, \quad (6)$$

- siły odśrodkowej

$$F_{rz} = F_r \cos \alpha = -\rho V a_{rz} = \rho V \omega^2 r \cos^2 \alpha \quad (7)$$

- i siły wyporu

$$F_{wz} = \rho_0 V (-g_z + a_{rz}) = \rho_0 V (g \sin \alpha - \omega^2 r \cos^2 \alpha). \quad (8)$$

Działająca na kulkę siła wyporu zależy od jej odległości od początku układu r (rys. 4) i od prędkości kątowej $\vec{\omega}$ wirownicy. Jeżeli $g \sin \alpha > \omega^2 r \cos^2 \alpha$ wówczas zwrot siły wyporu skierowany jest zgodnie z osią z (rys. 3a), natomiast, gdy $g \sin \alpha < \omega^2 r \cos^2 \alpha$ wówczas zwrot siły wyporu jest skierowany do środka układu (rys. 3c).

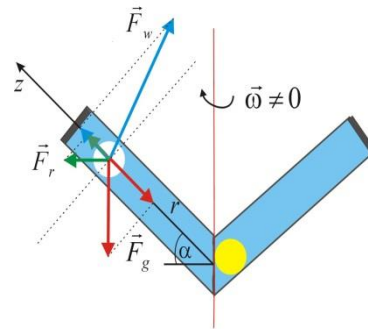
Wypadkowa siła działająca na kulkę wzdłuż osi z jest równa

$$F_z = (\rho_0 - \rho) V (g \sin \alpha - \omega^2 r \cos^2 \alpha). \quad (9)$$

1. Analiza zachowania kulki lekkiej

Z wyrażenia na siłę wypadkową (wzór 9) wynika, że jeżeli $\rho_0 > \rho$ (gęstość cieczy jest większa od gęstości piłeczki) to wartość wyrażenia w pierwszym nawiasie jest dodatnia i:

- jeżeli $g \sin \alpha > \omega^2 r \cos^2 \alpha$ (częstość wirowania jest odpowiednio mała), to wartość wyrażenia w drugim nawiasie jest dodatnia i wówczas wypadkowa siła działająca na kulkę ma wartość dodatnią, a więc zwrócona jest „na zewnątrz”, zgodnie ze zwrotem osi z . Kulka przesuwa się na ze-



Rys. 4. Składowe sił wzdłuż osi z

wnątrz aż do znalezienia położenia równowagi lub dotarcia do końca rurki (rys. 3b lub 3a).

- b. jeżeli $g \sin \alpha < \omega^2 r \cos^2 \alpha$ (częstość wirowania jest duża), to wartość wyrażenia w drugim nawiasie jest ujemna i wypadkowa siła działająca na kulkę jest zwrócona do środka układu. W tym przypadku kulka porusza się w kierunku środka układu (rys. 3c).
- c. aby kulka była w równowadze siła wypadkowa musi być równa zero $F = 0$ (rys. 3b), czyli $(g \sin \alpha - \omega^2 r \cos^2 \alpha) = 0$.

Wzór 9 określa również rodzaj równowagi, czy jest ona trwała czy nietrwała. Dla danej wartości ω , jeżeli kulka wychyli się z położenia równowagi (zwiększy r), to wyrażenie w drugim nawiasie będzie miało wartość ujemną, a to oznacza, że powstała wypadkowa siła będzie miała zwrot skierowany do położenia równowagi i spowoduje, że kulka wróci do tego położenia. Jeżeli kulka wychyli się z położenia równowagi w przeciwnym kierunku, zmniejszy r , to wyrażenie w nawiasie będzie miało wartość dodatnią, a to oznacza, że powstała wypadkowa siła będzie miała również zwrot skierowany do położenia równowagi i spowoduje, że kulka wróci do niego. Zatem kulka znajduje się w położeniu równowagi trwałej. Dla dowolnej wartości r istnieje taka wartość ω , dla której kulka będzie w równowadze trwałej.

2. Analiza zachowania kulki ciężkiej

Z wyrażenia na siłę wypadkową (wzór 9) wynika, że jeżeli $\rho_0 < \rho$ (gęstość cieczy jest mniejsza od gęstości piłeczki), to wartość wyrażenia w pierwszym nawiasie ma wartość ujemną. W związku z tym kulka ciężka zachowuje się przeciwnie niż kulka lekka (pierwszy przypadek); dla małych częstości obrotów przesuwa się do środka układu (r maleje), a dla dużych na zewnątrz (r rośnie). Położenia równowagi są takie same jak dla kulki lekkiej (ten sam warunek równowagi) jednak dla kulki ciężkiej są to położenia równowagi nietrwałej. Na kulkę wychyloną z położenia równowagi działa siła o przeciwnym niż w pierwszym przypadku zwrocie, czyli skierowana od położenia równowagi. Kulka wychylona z położenia równowagi już do niego nie wraca.

Omówione zjawisko pozwala zrozumieć, dlaczego pływające obiekty (np. człowiek) są wciągane do środka wiru (rys. 5).



Rys. 5. Drewniany pływak wciągany do środka wiru

IV. Akcelerometr

Podczas stopniowego zwiększania częstości wirowania ω , od pewnego momentu, lekka, styropianowa kulka zaczyna przemieszczać się w kierunku środka układu (r maleje). Jej położenie określone jest warunkiem równowagi

$$(g \sin \alpha - \omega^2 r \cos^2 \alpha) = 0 \quad (10)$$

a więc wartość przyspieszenia dośrodkowego, jakiemu podlega kulka w położeniu równowagi określone jest wzorem

$$a_r = \omega^2 r \cos \alpha = g \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (11)$$

Nie zależy ono od r , a więc w każdym położeniu równowagi przyspieszenie działające na kulkę jest takie samo. Za to położenie kulki r w jednoznaczny sposób wyznacza częstość wirowania

$$\omega^2 \cos \alpha = \frac{g}{r} \operatorname{tg} \alpha, \quad (12)$$

a tym samym przyspieszenie, jakiemu podlega koniec rurki. Przyspieszenie działające na końcu rurki w odległości R od środka układu, ma wartość: $a_R = \omega^2 R \cos \alpha$ i kierunek poziomy. Korzystając z wyznaczonej przez warunek równowagi częstości wirowania ω (wzór 12) otrzymujemy

$$a_R = g \frac{R}{r} \operatorname{tg} \alpha \quad (13)$$

Jeżeli piłeczka znajduje położenie równowagi w pozycji r to dla:

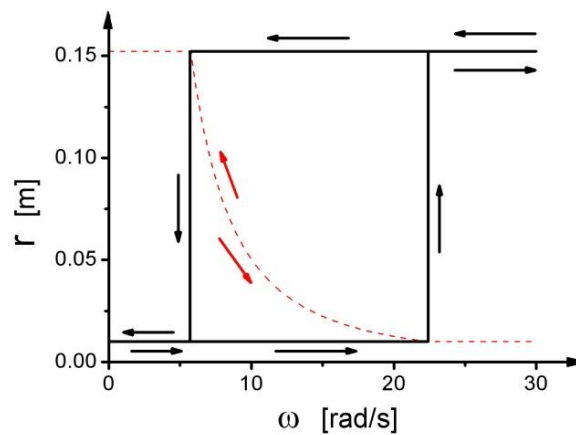
- $r = R, a_R = g \cdot \operatorname{tg} \alpha,$
- $r = \frac{1}{2} R, a_R = 2g \cdot \operatorname{tg} \alpha,$
- $r = \frac{1}{4} R, a_R = 4g \cdot \operatorname{tg} \alpha$ itd.

W ten sposób możemy wyskalować nasz przyrząd – akcelerometr. Odległość r kulki od początku układu określa wartość przyspieszenia dośrodkowego końca rurki.

V. Zjawisko histerezy

Wraz ze zwiększaniem częstości wirowania ω lekka, styropianowa kulka przemieszcza się w kierunku środka układu (r maleje) rys. 6. Gdy dotrze do dna rurki, ciężka kulka szybko przesuwają się do samej góry rurki. Jeżeli następnie częstość wirowania maleje to lekka kulka przesuwają się stopniowo do góry.

Ciężka kulka pozostaje w położeniu górnym, aż do osiągnięcia tego położenia przez kulkę lekką. Wtedy ciężka kulka przemieszcza się szybko do położenia dolnego. Prezentowany układ może więc być wykorzystany również do pokazania makroskopowego zjawiska histerezy, co zaznaczono linią ciągłą i strzałkami na rys. 6.



Rys. 6. Zależności położenia kulek od częstości wirowania: lekka kulka – linia przerywana, ciężka kulka – linia ciągła

Literatura

- [1] Johannes A. Van den Akker, *Generalized Archimedes' principle*, Am. J. Phys. 58(1990)1106–1108
- [2] C. Pontiggia, A. Marciano and E. Piano, *Gravitational field and accelerated frame: A simple apparatus*, Am. J. Phys. 53(1985) 915–916